

فصل اول:

اصول ایستایی

الف) مکانیک: علمی را گویند که اجسام را در وضعیتهای سکون و یا حرکت تحت تأثیر نیروهای وارده بررسی و تحلیل نماید.

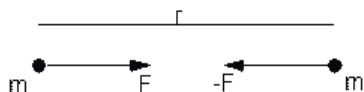
علم مکانیک به سه قسمت زیر تقسیم میشود:

1. مکانیک اجسام صلب (جامد):
الف) ایستایی (استاتیک): اجسام ساکن مورد بررسی قرار می گیرد.
ب) پویائی (دینامیک): اجسام متحرک مورد بررسی قرار می گیرد.
2. مکانیک اجسام تغییر شکل پذیر
3. مکانیک شاره ها (سیالات)

ب) مفاهیم پایه:

مفاهیم بنیادی که در مکانیک به کار برده می شوند عبارتند از:

1. فضا: مکان هندسی نقاطی است که در آن میدان سه بعدی برای نقاط به کار برده می شود.
2. زمان: علاوه بر مکان یک جسم وقوع یک جسم نیز مورد نظر است که و امد آن ثانیه است.
3. شبکه مرجع: موقعیت نقاط در فضا نسبت به یک دستگاه هندسی مرجع و با فواصل و زوایا مشخص می شود.
4. نیرو: تأثیر یک جسم روی یک جسم دیگر را نیرو گویند. نیرو با نقطه اثر بزرگی و جهت ها مشخص می شود.



ماده: ماده عبارت است از جسمی است که فضا گیر باشد. یک جسم ماده ای توسط یک سطح بسته ممصور شده است.

6. مانند (لغتی): خاصیتی از ماده است که تمایل دارد در برابر تغییر در حرکت ایجاد مقاومت نماید.
7. جرم: معیاری کمی از ماده (یا لغتی) است. جرم همچنین خاصیتی از هر جسم است که همواره با جاذبه متقابل آن جسم نسبت به اجسام دیگر همراه است.
8. جسم صلب: جسمی است که بین ذراتش هیچ جابجایی نسبی موجود نباشد.

ج) کمیت های عددی و برداری:

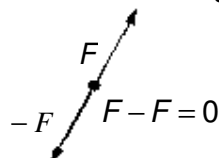
کمیت های که در استاتیک بکار می آید بر دو نوعند:

1. کمیت های عددی
 2. کمیت های برداری
- کمیت های عددی آنهایی هستند که فقط مقدار دارند. مانند: زمان، جرم و.....
- کمیت های برداری علاوه بر مقدار دارای امتداد نیز می باشند. مانند: نیرو
- قانون متوازی الاضلاع برای جمع بردارها:

همانطوری که گفته شده در صورتی که به یک ذره دونیرو تأثیر کند با توجه به اینکه نیروها بردار باشند می بایستی از قانون جمع متوازی الاضلاع برداری یک نیرو به نام برآیند قرار داد که از رسم قطر متوازی الاضلاع بدست می آید که در بخشهای بعد به تفصیل ذکر خواهد شد.

اصل قابلیت انتقال:

اگر نیرویی دارد بر نقطه معمولی از یک جسم صلب را بوسیله نیروی دیگری که اولی الزاماً مقدار و جهت برابر ولی نقطه اثر آن متفاوت است جایگزین کنیم وضعیت تعادل یا حرکت جسم تغییر نمی کند.



نمونه نمایش یک کمیت برداری:

یک کمیت برداری v توسط یک پاره خط که دارای راستای بردار بوده و بوسیله یک علامت پیکان جهت آن مشخص می شود نشان داده می شود.



$$\vec{V} \text{ و } \underline{V} = V \text{ بردار}$$

$$|\underline{V}| = V \text{ اندازه}$$

د) قوانین نیوتن:

1. **قانون اول:** هرگاه برآیند نیروهای وارد بر یک ذره صفر شود ذره اگر در حال سکون باشد ساکن می ماند و اگر در حال حرکت باشد به حرکت خود ادامه می دهد.

2. **قانون دوم:** شتاب یک ذره متناسب با برآیند نیروهای است که به آن وارد می گردند.

$$F = ma$$

F : برآیند نیروها m : جرم ذره a : شتاب ذره

3. **قانون سوم:**

نیروهای عمل و عکس العمل میان دو جسم از نظر مقدار برابرند و در خلاف جهت یکدیگر عمل می نمایند و در روی یک راستا واقع می باشد.

طبق قانون گرانش نیوتن که می گوید دو ذره به جرم های M و M یکدیگر را با نیروهای مساوی و مختلف جهت $(F \text{ و } -F)$ جذب می کنند بزرگی این نیرو (F) از فرمول زیر بدست می آید که در آن R فاصله بین دو ذره و G ثابت عمومی که ثابت گرانش است.

$$F = G \cdot \frac{MM}{R^2}$$

نتیجتاً مقدار (W) وزن یک ذره به جرم M را می شود به صورت زیر بیان کرد:
 $W = M \cdot G$ $G = 9.81 \text{ M/S}^2$

سیستم های یکاها:

سیستم بین المللی یکاها (یکاهای SI)

در طی سالهای اخیر تقریباً کلیه کشورهای جهان سیستم بین المللی آحادیابه (زبان فرانسه SYSTÈME INTERNATIONAL D'UNITES) که مخفف آن SI می باشد را برای تمامی کارهای مهندسی و علوم انتخاب کردند. در این سیستم یکاهای اصلی، یکاهای طول، جرم و زمان هستند که آنها را به ترتیب متر (M) و کیلوگرم (KG) و ثانیه (S) می نامند. یکای نیرو در این سیستم یک یکای فرعی است که به آن نیوتن (N) می گویند و بنا به تعریف یک نیوتن نیرویی است که به جرم یک کیلوگرمی شتابی برابر با 1 M/S^2 بدهد.

$$1 \text{ N} = (1 \text{ KG})(1 \text{ M/S}^2) = 1 \text{ KG.M/S}^2$$

پیشوندها و امدها:

نماد	پیشوند	مضرب (مقدار)
G	کیگا	$10^9 = 1000000000$
M	مگا	$10^6 = 1000000$
K	کیلو	$10^3 = 1000$
m	میلی	$10^{-3} = 0.001$
μ	میکرو	$10^{-6} = 0.000001$
N	نانو	$10^{-9} = 0.000000001$

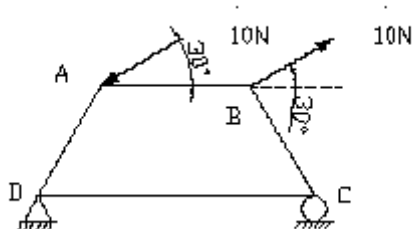
$$\begin{array}{llll}
 1 \text{ KM} = 1000 \text{ M} & 1 \text{ MM} = 0.001 \text{ M} & 1 \text{ MG} = 1000 \text{ KG} & \\
 1 \text{ G} = 0.001 \text{ KG} & 1 \text{ KN} = 1000 \text{ N} & & \\
 3.82 \text{ km} = 3820 \text{ m} & 47.2 \text{ mm} = 0.0472 \text{ m} & 3.82 \text{ kn} = & \\
 3.82 * 10^3 \text{ mm} & 47.2 \text{ mm} = 47.2 * 10^{-3} \text{ mm} & &
 \end{array}$$

فصل دوم:

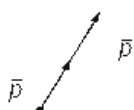
استاتیک ذره ها:

نیروهای واقع در صفحه:

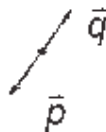
نیرونماینده کنش یک جسم بر روی یک جسم دیگر است و به طور کلی بانقطه اثر، بزرگی اوراستایش مشخص می شود.



جمع بردارها:

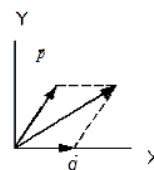
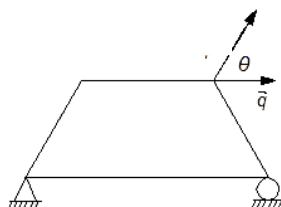


$$\vec{R} = \vec{p} + \vec{q}$$

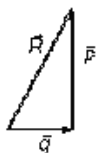


$$\vec{R} = \vec{p} - \vec{p} = 0$$

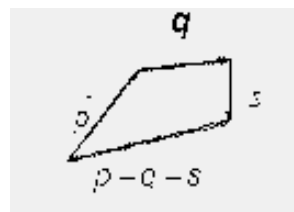
قانون متوازی الاضلاع:



بردار برآیند بار رسم بردارها $\vec{R} = \vec{p} + \vec{q}$ به شیوه سربه دم و بعد اتصال دم بردار P به سر بردار Q بدست می آید.



مالا جمع بیش از سه بردار را در نظرمی گیریم.



$$p + q + s = (p + q) + s = p + (q + s)$$

فاصلیت شرکت پذیری بردارها:

باتوجه به جمع بردارهای صفحه قبل نتیجه می گیریم:

1. جمع بردارها دارای فاصلیت جابجایی است.

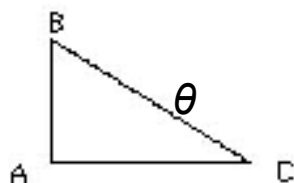
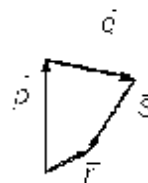
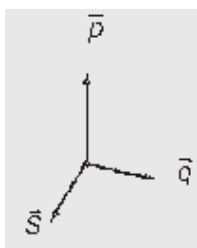
2. جمع بردارها دارای فاصلیت شرکت پذیری است.

ضرب اسکالردریک بردار:

$$p + p = 2p \Rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n = np$$

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n$$

برآیند چندنیروی هم راس:



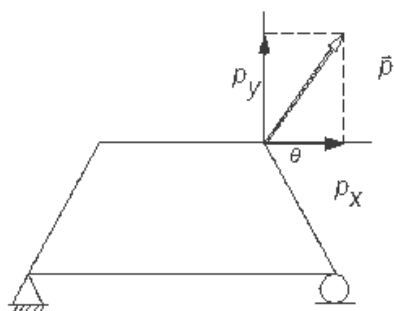
$$\cos \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin \theta = \frac{AB}{BC}$$

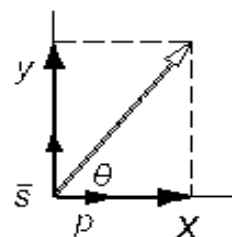
$$\tan \theta = \frac{AB}{AC}$$

تجزیه یک نیرو به مولفه های آن:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$



$$p_y = p \sin \theta$$

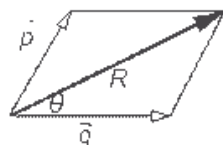


در امتداد محور x و y های مثبت دو بردار واحد افتخاری کنیم به این بردارها برداری که می گویند و آنها را به ترتیب بر روی محورهای x و y با نوز نشان می دهند. باتوجه به ضرب یک اسکالردری بردار خواهیم داشت مولفه های قائم P_x , P_y یک نیروی p رami شود از طریق ضرب بردارهای نوز در اسکالرهایی مناسب بدست آورد.

$$p_x = p_x \cdot i, p_y = p_y \cdot j, p = p_x \cdot i + p_y \cdot j$$

$$p_x = p \cos \theta, p_y = p \sin \theta$$

قانون متوازی الاضلاع:



$$\vec{p} = p_x \cdot i + p_y \cdot j$$

$$\vec{q} = q_x \cdot i + q_y \cdot j \Rightarrow \vec{R} + \vec{q} = (p_x \cdot i + p_y \cdot j) + (q_x \cdot i + q_y \cdot j)$$

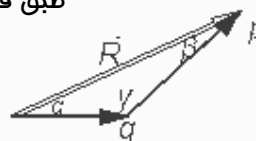
$$r_x = \sum f_x, r_y = \sum f_y \quad \vec{R} = (p_x + q_x)i + (p_y + q_y)j$$

یا با استفاده از مثلثاتی خواهیم داشت:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta$$

طبق قانون سینوسها:

$$\frac{R}{\sin \gamma} = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta}$$

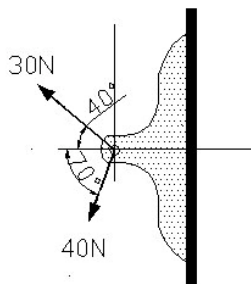


مثال 1:

مطلوبست برآیند دو نیروی 40N, 30N و ا در بر شکل زیر را با استفاده از: الف) قانون متوازی الاضلاع ب) قانون مثلث

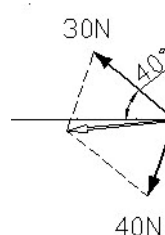
د) جمع برداری

الف)



$$R^2 = 30^2 + 40^2 + 2 \times 30 \times 40 \cos 110$$

$$R = 41N$$



د)

$$\vec{p} = -30 \cos 40^\circ i + 30 \sin 40^\circ j = -22.98i + 19.28j$$

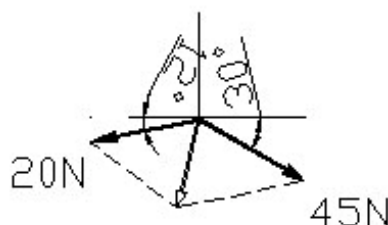
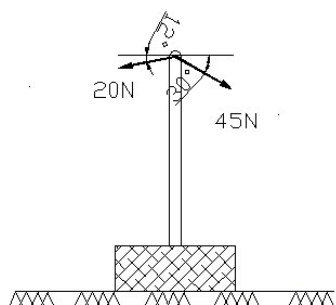
$$\vec{Q} = -40 \cos 70^\circ i - 40 \sin 70^\circ j = -13.68i - 37.59j$$

$$\vec{R} = \vec{p} + \vec{q} = (-22.98 - 13.68)i + (19.28 - 37.59)j$$

$$\vec{R} = -36.66i + 18.31j, r = \sqrt{36.66^2 + 18.31^2} \approx 41n$$

مثال 2:

دکل AB توسط دوی نیروی منظور شده در نقطه A تحت فشار می باشد. مطلوب است تعیین برآیند و جهت آن ناشی از این دوی نیرو در نقطه A را.



$$R_x = \sum F_x = 45 \cos 30^\circ - 20 \cos 12^\circ = 38.97 - 19.56 = 19.41$$

$$R_y = \sum F_y = -45 \sin 30^\circ - 20 \sin 12^\circ = -22.5 - 4.16 = -26.66$$

$$R = \sqrt{19.41^2 + 26.66^2} = 32.97$$

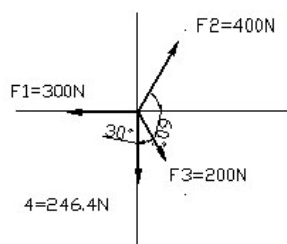
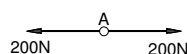
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{19.41}{26.66} \right) = 36.04^\circ$$

روش دوم:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta = 20^2 + 45^2 + 2 \times 20 \times 45 \times \cos 138^\circ = 32.97$$

تعادل یک ذره:

طبق قانون نیوتون در حالتی که تأثیر نیروها صفر است می گویند ذره در حال تعادل است پس می توان گفت وقتی برآیند نیروهای وارد بر یک ذره صفر باشد ذره در حال تعادل است.



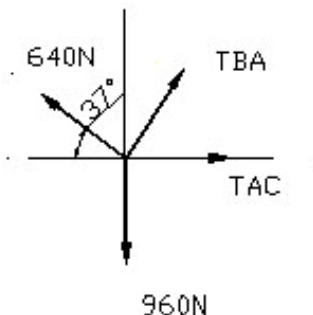
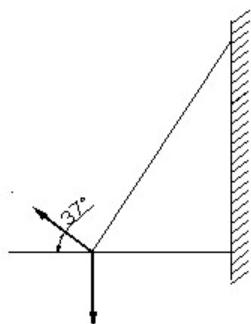
$$R = \sum F = 0 \Rightarrow R = \sum (F_x \cdot i + F_y \cdot j) = 0 \quad (\sum F_x) i + (\sum F_y) j = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -246.4 + 400 \sin 60^\circ - 200 \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow -246.4 + 346.41 - 173.2 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -300 + 400 \cos 60^\circ + 200 \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow -300 + 200 + 100 = 0$$

مثال 3:

در شکل زیر کشش در کابلهای AB و AC را بدست آورید.



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{960}{280}\right) = 73.74$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow (T_{AB} \sin 73.74) - 960 + 640 \sin 37 = 0 \Rightarrow 0.96 T_{AB} - 960 + 385.16 = 0$$

$$T_{AB} = \frac{574.84}{0.96} = 598.79 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AC} + 598.79 \cos 73.74^\circ - 640 \cos 37^\circ = 0 \Rightarrow T_{AC} = 343.74 \text{ N}$$

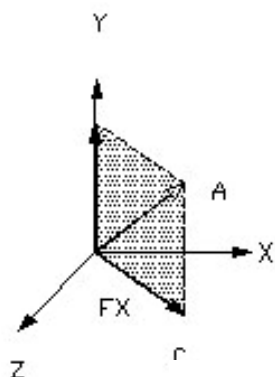
نیروها در فضا:

$$F_x = F \sin \theta_y$$

$$F_y = F \cos \theta_y$$

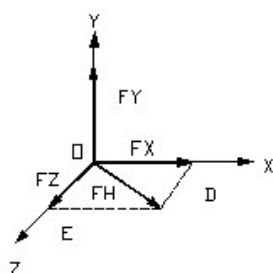
مولفه عمودی

مولفه افقی



θ_y = زاویه نیروی F با محور y

α = زاویه صفحه قائم ABC با صفحه xy



$$F_x = F_h \cos \theta = F \sin \theta_y \cos \theta$$

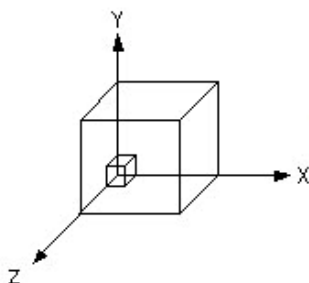
$$F_z = F_h \sin \theta = F \sin \theta_y \sin \theta$$

طبق قانون فیثاغورث:

$$F^2 = (OA)^2 = (OC)^2 + (OB)^2 = F_h^2 + F_y^2$$

$$F_h^2 = (OC)^2 = (OD)^2 + (OE)^2 = F_x^2 + F_z^2$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

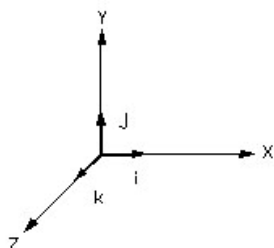


$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \quad (1)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \theta_x \\ F_y &= F \cos \theta_y \\ F_z &= F \cos \theta_z \end{aligned} \quad (2)$$

نیروی F را می توان با تعریف بردار یکه های نوز که به ترتیب در امتداد محورهای x و y و z قرار دارند به صورت زیر بیان کرد.



$$F = F_x \cdot i + F_y \cdot j + F_z \cdot k \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

$$\Rightarrow F = F(\cos \theta_x \cdot i + \cos \theta_y \cdot j + \cos \theta_z \cdot k)$$

نتیجتاً می توان نیروی F را به صورت ضرب اسکالر F و بردار

$$\lambda = \cos \theta_x \cdot i + \cos \theta_y \cdot j + \cos \theta_z \cdot k \quad (5)$$

بیان کرد که به λ مولفه یکه بردار F گویند.

$$\lambda_x = \cos \theta_x \quad (6)$$

$$\lambda_y = \cos \theta_y$$

$$\lambda_z = \cos \theta_z$$

مجموع مربعات مولفه های یک بردار برابر با مربع بزرگی آن است.

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \quad (7)$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

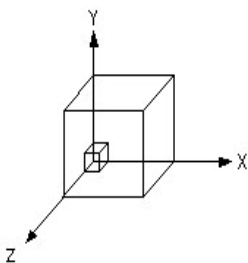
$$\vec{F} = F \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow F = \frac{F_x}{\cos \theta_x} = \frac{F_y}{\cos \theta_y} = \frac{F_z}{\cos \theta_z}$$

پیدا کردن بردار واحد امتدادی که از دو نقطه می گذرد.

$$\vec{r}_{B/A} = \overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\lambda_F = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$$



9

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

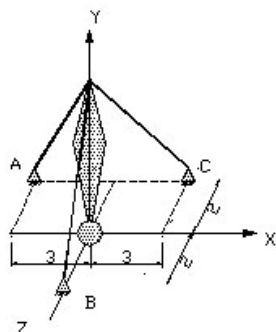
x_b

مثال 4:

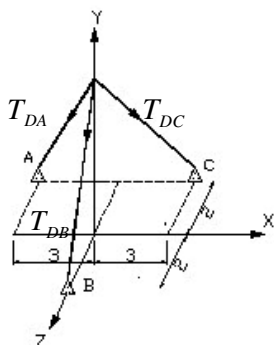
دکل مخابراتی نشان داده شده در شکل زیر به چرم

120kg بوسیله سه کابل مهاری به زمین متصل شده است مطلوب است محاسبه نیروهای کششی در کابل‌های

مذکور را.



$$\begin{array}{c|c} -3 & 0 \\ \hline A & 0 \\ -2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline B & 0 \\ 2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ \hline C & 0 \\ -2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 0 & 6 \\ \hline D & 6 \\ 0 & 0 \end{array}$$



دیگرام آزاد جسم

$$W = m.g = 120 \times 10 = 1200 \text{ N}$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A)\vec{i} + (y_D - y_A)\vec{j} + (z_D - z_A)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|AD| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{\overrightarrow{AD}}{|AD|} = \frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BD} = 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$|BD| = \sqrt{40}$$

$$\vec{\lambda}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{|BD|} = \frac{6}{\sqrt{40}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{40}}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{CD} = -3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|CD| = 7$$

$$\vec{\lambda}_{CD} = -\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$$

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD} \cdot \vec{\lambda}_{AD} = F_{AD} \left(\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \right)$$

$$\vec{F}_{CD} = F_{CD} \cdot \vec{\lambda}_{CD} = F_{CD} \left(-\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \right)$$

$$\vec{F}_{BD} = F_{BD} \cdot \vec{\lambda}_{BD} = F_{BD} \left(\frac{6}{\sqrt{40}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{40}}\vec{k} \right)$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow \quad \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

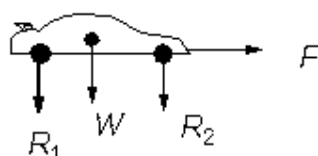
فصل سوم

اجسام صلب:

نیروهایی که به اجسام صلب وارد میشوند دو دسته اند:

الف) نیروهای خارجی: نماینده تاثیر سایر اجسام بر روی جسم صلب هستند و این نیروها (فشار خارجی جسم صلب را) توجیه میکنند.

ب) نیروهای داخلی: نیروهایی هستند که ذرات تشکیل دهنده جسم صلب (ادر کنار هم نگه می دارند).



ضرب بردارها:

الف) ضرب برداری دو بردار و ضرب خارجی

خواص حاصلضرب برداری دو بردار P و Q که یک بردار U است به قرار زیر است:

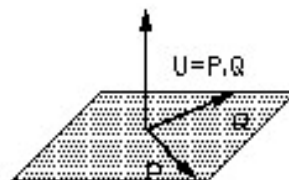
- 1) بردار حاصلضرب U بر صفحه P و Q عمود می باشد که جهت آن با استفاده از قانون دست راست بدست می آید بدین صورت که چهار انگشت در امتداد بردار اول (بردار P) و جهت بسته شدن انگشتان در جهت بردار دیگر بردار (Q) می باشد جهت انگشت شصت جهت بردار U می باشد

(مقدار حاصلضرب برابر است با مقدار عددی P و Q در سینوس زاویه بین آن دو

$$U = PQ \sin \theta$$

$$U = 0 \leftarrow P = Q$$

P و Q موازی یا در راستای هم



1) قانون جابجایی در مورد ضرب خارجی صادق نیست

$$Q \times P = -(P \times Q)$$

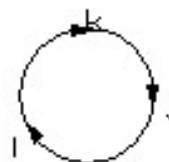
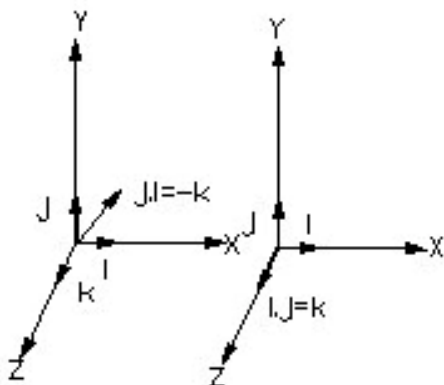
زاویه بین P و Q در جهت مثلثاتی باید باشد

$$P = P \times Q \quad \text{بر روی } Q \text{ بیافتد}, \quad Q = Q \times P \quad \text{بر روی } P \text{ بیافتد}$$

2) خاصیت توزیع پذیری در مورد ضرب خارجی صادق است

$$P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2$$

ماصلضرب برداری بر حسب مولفه های قائم



$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

$$\begin{array}{lll} i \times i = 0 & i \times j = k & i \times k = -j \\ j \times i = -k & j \times j = 0 & j \times k = i \\ k \times i = j & k \times j = -i & k \times k = 0 \end{array}$$

$$\vec{P} = (P_x i + P_y j + P_z k), \vec{Q} = (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = (P_x i + P_y j + P_z k) \times (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$$

$$= P_x (Q_x i \cdot i + Q_y j \cdot j + Q_z k \cdot k) = P_x Q_y k - P_x Q_z j$$

$$= P_y (Q_x j \cdot i + Q_y j \cdot j + Q_z j \cdot k) = -P_y Q_x k + Q_y Q_z i$$

$$= P_z (Q_x k \cdot i + Q_y k \cdot j + Q_z k \cdot k) = P_z Q_x j + P_z Q_y i$$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = (P_y Q_z - P_z Q_y) i - (P_x Q_z - P_z Q_x) j + (P_x Q_y - P_y Q_x) k$$

اگر به رابطه قبل نگاه کنیم می بینیم که جمله های طرف راست آن نماینده بسط یک دترمینان هست پس

ماصلضرب (u) را می توانیم به صورت زیر بیان کنیم که راحت تر به خاطر سپرده شود.

$$U = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = (P_y Q_z - P_z Q_y) i - (P_x Q_z - P_z Q_x) j + (P_x Q_y - P_y Q_x) k$$

ضرب عددی دو بردار و ضرب داخلی:

مقصود از ضرب عددی بردار $\vec{P}$ در بردار $\vec{Q}$ که با هم زاویه θ سافته اند تعیین عددی است که مقدار آن برابر $U = \vec{P} \times \vec{Q}$ باشد.

وقتی گفته می شود بردار Q را روی P تصویر کنید یعنی ضرب داخلی

$$U = P.Q \cos \theta$$

$$U = \vec{A} \cdot \vec{A} = A.A \cos \theta = A^2$$

از تعریف ضرب داخلی دو بردار نتیجه می شود که بردارهای P و Q در صورتیکه حاصلضرب داخلی شان برابر با صفر گردد متعامد می باشند $P.Q = 0 \Rightarrow P \perp Q$

به عنوان مثال کار دو بردار هستند که بر هم عمودند (dof)

$i.i = 1$	$i.j = 0$	$i.k = 0$
$j.i = 0$	$j.j = 1$	$j.k = 0$
$k.i = 0$	$k.j = 0$	$k.k = 1$

حاصلضرب بردارهای یک یا صفر است یا یک

$$\vec{P} = P_x i + P_y j + P_z k \quad \vec{Q} = Q_x i + Q_y j + Q_z k$$

$$\begin{aligned} \vec{P} \cdot \vec{Q} &= (P_x i + P_y j + P_z k)(Q_x i + Q_y j + Q_z k) \\ &= (P_x Q_x i.i + P_x Q_y i.j + P_x Q_z i.k) \\ &+ (P_y Q_x j.i + P_y Q_y j.j + P_y Q_z j.k) \\ &+ (P_z Q_x k.i + P_z Q_y k.j + P_z Q_z k.k) = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \end{aligned}$$

تعیین زاویه بین دو بردار:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{PQ}$$

$$\frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} = \frac{P_x}{PQ} \cdot \frac{Q_x}{PQ} + \frac{P_y}{PQ} \cdot \frac{Q_y}{PQ} + \dots = \cos \theta$$

$$\frac{P_x}{PQ} = L_1 \quad \frac{Q_x}{PQ} = L_2$$

$$\Rightarrow \cos \theta = L_1 L_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

که در آن $L_1, L_2, m_1, m_2, n_1, n_2$ کسینوس هاویهای (شیب) بردارها هستند. همچنین مشاهده می گردد که هر دو بار در صورتیکه کسینوس هاوی آنها در رابطه زیر صدق کنند متعامد می باشند.

$$L_1 L_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

خواص ضرب داخلی بردارها:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{Q} \cdot \vec{P}$$

(1) قانون جابجایی صادق است

$$\vec{P} \cdot (\vec{Q} + \vec{R}) = \vec{P} \cdot \vec{Q} + \vec{P} \cdot \vec{R}$$

(2) قانون توزیع پذیری صادق است

مثال:

دو بردار $\vec{A} = 10\vec{i} + 20\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{B} = -10\vec{j} + 12\vec{k}$ مفروضند.

الف) حاصلضرب داخلی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را محاسبه نمائید.

ب) زاویه بین دو بردار

ج) تصویر بردار $\vec{A}$ روی امتداد بردار $\vec{B}$

د) بردار تصویر $\vec{A}$ روی امتداد بردار $\vec{B}$

$$U = \vec{A} \cdot \vec{B} = (10\vec{i} + 20\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (-10\vec{j} + 12\vec{k}) = (10 \times 0) + (20)(-10) + (3)(12) = -164$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 3^2} = 22.56$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-10)^2 + (12)^2} = 15.62$$

$$U = AB \cos \theta \Rightarrow 164 = 22.56 \times 15.62 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{-164}{22.56 \times 15.62}$$

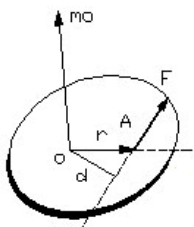
$$\theta = 117.7^\circ$$

$$\vec{C} = A \cos \alpha = 22.56 \cos 117.71 = -10.46$$

$$\lambda = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-10\vec{j} + 12\vec{k}}{15.62} \Rightarrow \vec{C} = C\vec{n} = -10.46 \left(\frac{-10\vec{j} + 12\vec{k}}{15.62} \right) = 6.7\vec{j} - 8\vec{k}$$

گشتاور یک نیرو حول نقطه:

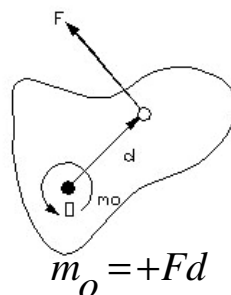
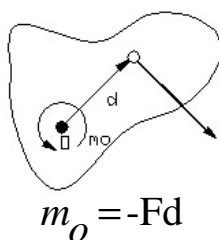
فرض کنیم نیروی F بر یک جسم صلب اثر کند این نیرو با بردار نشان داده میشود. مکان A را می شود با بردار r که نقطه ثابت مرجع (O) را به A متصل می کند مشخص کرد که به آن بردار مکان A گویند.



حال می خواهیم گشتاور نیروی F را حول O به صورت ضرب برداری F و r تعریف کنیم.

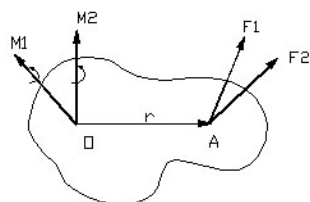
$$M_o = r \times F = rF \sin \theta = Fr \sin \theta = Fd$$

که d فاصله عمودی O تا خط اثر F می باشد. نیروی F علاوه بر آنکه در جسم تمایل به حرکت در امتداد خط اثر نیرو ایجاد می کند. این گرایش را گشتاور M نیرو حول محور داده شده نامند. در سیستم یکاهای (SI) نیرو بر مسب نیوتن و فاصله بر مسب متر (m) بیان می شود. گشتاور نیرو بر مسب نیوتن-متر ($N.M$) بیان می شود.



قضیه وارپنیون و یا اصل گشتاور:

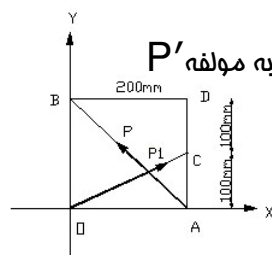
برای نیرو هایی که در یک صفحه واقعند بدین صورت بیان می شود که گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر حاصل جمع گشتاورهای مولفه های نیرو حول همان نقطه می باشد.



$$m_1 + m_2 = r \times F_1 + r \times F_2$$

$$m = r \times (F_1 + F_2)$$

مثال:



نیروی $P=10N$ در امتداد دو نقطه AB مربعی به اضلاع $200mm$ اعمال شده است. مطلوبست محاسبه مولفه P' از نیروی P در امتداد OC با جهت مثبت از O به طرف C

کسینوسهای بردار $\vec{OC}$:

$$O = \begin{vmatrix} 0 \rightarrow x \\ 0 \rightarrow y \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{vmatrix}$$

$$OC = (0.2 - 0)i + (0.1 - 0)j$$

$$L = \frac{0.2}{\sqrt{0.04 + 0.01}} = \frac{0.2}{\sqrt{0.05}} = 0.894$$

$$m = \frac{0.1}{\sqrt{0.05}} = 0.447$$

و

$$n_{\vec{OC}} = 0.894i + 0.447j$$

کسینوسهای بردار $\vec{AB}$:

$$A = \begin{vmatrix} 0.2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0.2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{AB} = (0 - 0.2)i + (0.2 - 0)j$$

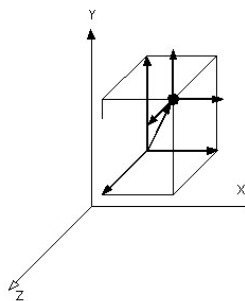
$$\alpha = \frac{-0.2}{\sqrt{0.04 + 0.04}} = \frac{-0.2}{\sqrt{0.08}} = -0.707$$

$$B = \frac{0.2}{\sqrt{0.08}} = 0.707$$

$$n_{\vec{AB}} = (-0.707i + 0.707j)$$

$$F_{\vec{AB}} = \vec{F} \cdot n_{\vec{AB}} = 10 \times (-0.707i + 0.707j) = -7.07i + 7.07j$$

$$F_{\vec{OC}} = F_{\vec{AB}} \cdot n_{\vec{OC}} = (-7.07i + 7.07j) \cdot (0.894i + 0.447j) \\ = (-7.07 \times 0.894 + 7.07 \times 0.447) = -3.16N$$



مولفه های قائم گشتاور در یک نیرو:

$$m_o = r \times F$$

اگر نقطه B بر مبدا منطبق باشد:

$$r = xi + yj + zk$$

$$F = F_x \cdot i + F_y \cdot j + F_z \cdot k$$

با جایگذاری در رابطه m_O داریم:

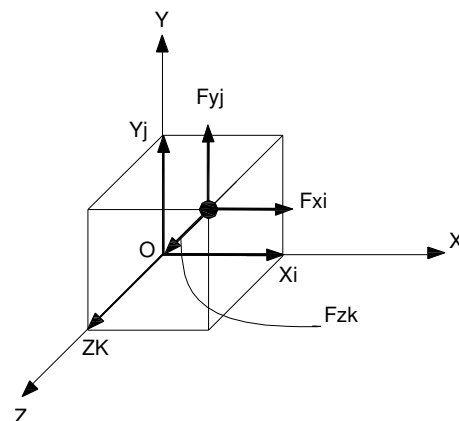
$$m_O = m_x \cdot i + m_y \cdot j + m_z \cdot k$$

$$m_x = yF_z - zF_y$$

$$m_y = zF_x - xF_z$$

$$m_z = xF_y - yF_x$$

$$m_B = r \frac{A}{B} \times F = (r_A - r_B) \times F$$



$$m_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$m_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

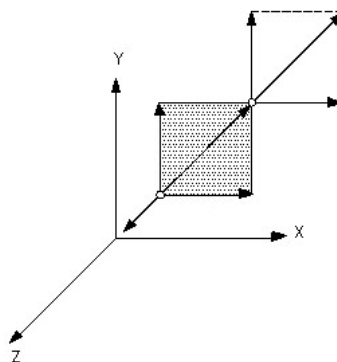
$$x_{A/B} = x_A - x_B$$

$$y_{A/B} = y_A - y_B$$

در مسائل دو بعدی $z, F_z = 0$

$$z_{A/B} = z_A - z_B$$

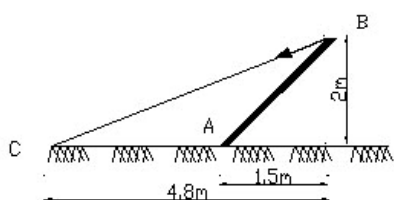
$$m_O = (xF_y - yF_x)k$$



مثبت بودن m_O حاکی از آن است که بردار m_O به طرف خارج از صفحه کتاب است (تمایل به پرفاندن جسم حول

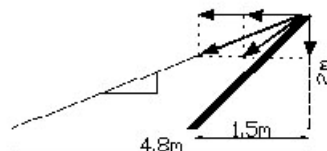
در جهت باد ساعتگرد)

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$$



مثال:

مطلوبست گشتاور نیروی 260N حول نقطه A را
الف) بوسیله تجزیه نیروی مموری x و y وارد بر نقطه B
ب) بوسیله تجزیه نیروی ممورهای x و y در نقطه C

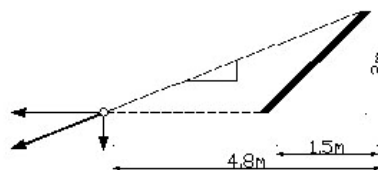


$$F_x = \frac{12}{13}(260) = 240N$$

$$F_y = \frac{5}{13}(260) = 100N$$

$$M_A = F_x \times 2 - F_y \times 1.5 = 240 \times 2 - 100 \times 1.5 = 330N.M$$

ابتدا نیروی 260N را در امتداد خط اثرش امتداد داده تا نقطه C وارد شود.



$$F_x = \frac{12}{13}(260) = 240N$$

$$F_y = \frac{5}{13}(260) = 100N$$

$$M_A = F_y \times 3.3 + F_x \times 0 = 100 \times 3.3 = 330N.M$$

$$C \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 4.8 \\ 20 \end{vmatrix} \quad A \begin{vmatrix} 3.3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$F_{BC} = F_{BC} - \lambda_{BC} = 260 \times \frac{48i + 20j}{\sqrt{48^2 + 20^2} = 52} = 240i + 100j$$

$$r_{A/B} = (4.8 - 3.3)i + 2j = 1.5i + 2j$$

$$m_A = F \times r = (240i + 100j)(1.5i + 2j) = 240 \times 2k - 100 \times 1.5k = 330N$$

ضرب سه گانه ممتلذ سه بردار:

ماصلضرب داخلل سه بردار:

ضرب سه گانه ممتلذ عبارت است از (ماصلضرب داخلل دو بردار) که یکی از آندو توسط ماصلضرب خارجل دو بردار دیگر بیان شده باشد. این ماصلضرب که کمیتل عددل می باشد توسط هر یک از (وابط معادل زیر قابل بیان است):

$$(P \times Q) \cdot R = R \cdot (P \times Q) = -R \cdot (Q \times P)$$

در مقیت رعایت برانتزهادر عبارت فوق الذکر لازم نمی باشد چون نوشتن ماصلضرب صورت $P \times (Q \cdot R)$ بدون مفهوم است همچنین میتوان ثابت کرد که:

$$P \times Q \cdot R = P \cdot Q \times R$$

که قانون جابجائل نقطه و ضربدر را در ماصلضرب سه بردار بدون اینکه تغییری در نتیجه عددل ماصلضرب حاصل شود مشفص میکند. بعلاوه میتوان با استفاده از بسط دادن نشان داد که:

$$P \times Q \cdot R = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

ماصلضرب خارجل سه بردار:

عبارت است از ماصلضرب خارجل دو بردار که یکی از آندو خود توسط ماصلضرب خارجل دو بردار دیگر بیان شده باشد حاصل یک بردار بوده و توسط یکی از عبارت معادل زیر بیان می شود.

$$(P \times Q) \times R = -R \times (P \times Q) = R \times (Q \times P)$$

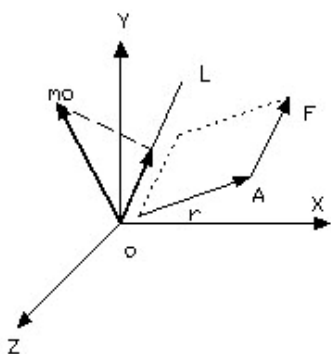
در اینجا وجود پیرانتز ضرورت دارد زیرا در رابطه ای مانند $P \times Q \times R$ به علت نا مشخص بودن اینکه کدام دو بردار در هم ضرب شده اند مبهم است. می توان ثابت کرد که حاصلضرب سه گانه فارژی معادل عبارت زیر است:

$$(P \times Q) \times R = R \cdot PQ - R \cdot QP$$

$$P \times (Q \times R) = P \cdot RQ - P \cdot QR$$

گشتاور یک نیرو حول یک محور:

گشتاور نیروی F حول نقطه O برابر m_{OL} می باشد حال اگر محور OL را در نظر بگیریم گشتاور m_{OL} نیروی F حول محور OL را به صورت تصویر گشتاور m_{OL} نیروی F تعریف می کنیم.



اگر برداری که در امتداد L با λ نشان دهیم خواهیم داشت.

$$m_{OL} = \lambda \cdot m_O = \lambda \cdot (r \times F)$$

گشتاور یک نیرو تصویر یک بردار بر روی یک محور

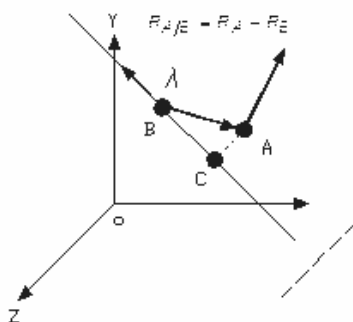
که گشتاور نیروی F حول L اسکالر است و از ضرب سه گانه مفصل سه بردار F, r, λ بدست می آید و با:

$$m_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z = \text{کسینوسهای بردار } OL$$

$$x, y, z = \text{مختصات نقطه اثر نیروی } F$$

$$F_x, F_y, F_z = \text{مولفه های نیروی } F$$



$$m_{BL} = \lambda \cdot m_B = \lambda \cdot (r_{A/B} \times F)$$

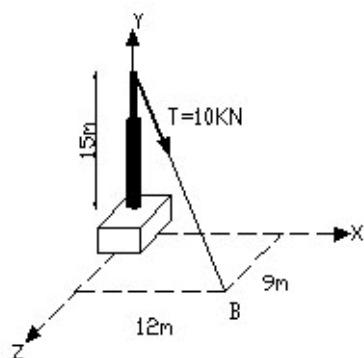
$$r_{A/B} = r_A - r_B$$

نماینده برداری است که از B به A رسم می شود.

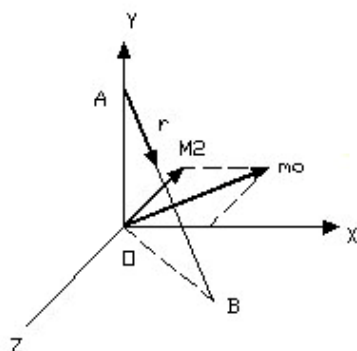
$$m_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

مثال:

کابلی که انتهای فوقانی یک دیرک صلب نقطه A را به نقطه B متصل می کند تحت کشش $T=10\text{KN}$ می باشد. مطلوبست گشتاور M_z نیروی T حول محور Z ها را برپایه دیرک می باشد.



$$\begin{array}{c|c} 0 & 12 \\ \hline A & 15 \\ \hline 0 & 9 \end{array}$$



بردار M_O عمود بر صفحه ای است که T و نقطه O را در بر می گیرد.

$$m_z = m_o \cdot k = (-15 \times 5.66k + 4.24i) \cdot k = -84.9 \text{ KN.m}$$

$$\vec{r} = 15j(m)$$

$$n = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{(12-0)i + (0-15)j + (9-0)k}{\sqrt{12^2 + 15^2 + 9^2}} = 0.566i - 0.707j + 4.24k$$

$$\vec{T} = 10n = 5.66i - 7.07j + 4.24k$$

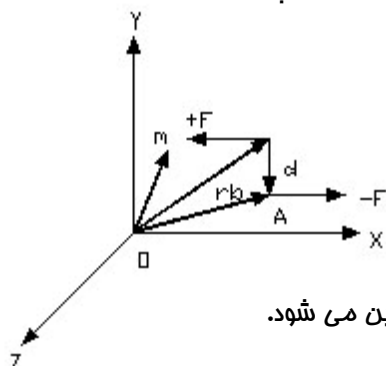
$$m_o = \vec{r} \times \vec{T} = (15j) \times (5.66i - 7.07j + 4.24k)$$

$$= (-15 \times 5.66k + 15 \times 4.24i)$$

علامت منفی معرف آن است که M_z در خلاف جهت محور Z ها عمل می کند.

کوپل یا زوج نیرو:

گشتاور حاصل از دو نیروی مساوی، موازی و مختلف الجهت که در امتداد یک خط واقع نیستند کوپل خوانده می شود.



$$m = r_A \times (-F) + r_B \times (F) = (-r_A + r_B) \times F$$

$$r = (-r_A + r_B)$$

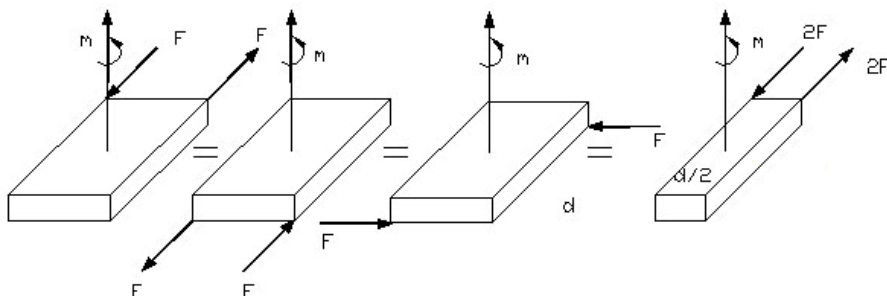
$$m = r \times F$$

$$m = rF \sin \theta = Fd$$

که d فاصله عمودی میان خط اثرهای F و -F است. جهت m از روی قاعده دست راست تعیین می شود.

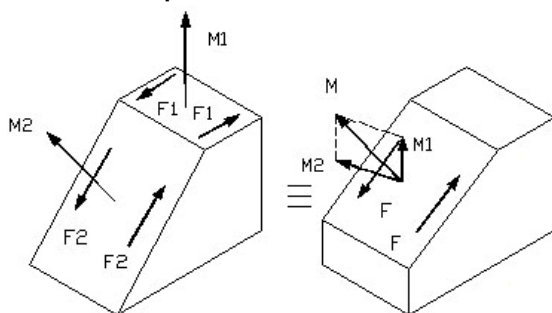
کوپل‌های معادل:

با تغییر یافتن مقادیر d و F یک کوپل مفروض مشروط بر آن که حاصلضرب آنها ثابت بماند، تغییری در آن کوپل به وجود نخواهد آمد. به همین ترتیب مقدار یک کوپل ثابت می ماند بدون توجه به اینکه زوج نیرو در کدامیک از صفات موازی یکدیگر عمل می نمایند. شکلهای زیر چهار حالت مختلف یک کوپل ثابت M را نشان میدهد.



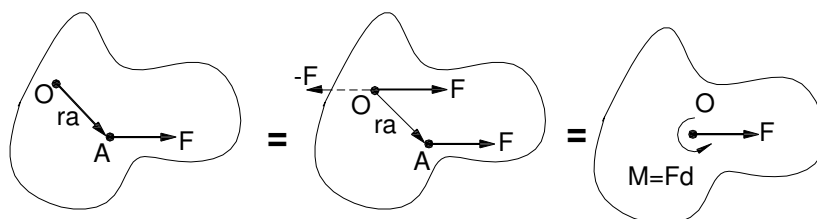
جمع بستن کوپلها:

کوپلهائی را که در صفات غیر موازی با یکدیگر عمل می کنند می توان با قانون عادی ترکیب بردارها جمع کرد. مثلاً در شکل (A) کوپل M_1 در اثر نیروهای F_1 و کوپل M_2 در اثر نیروهای F_2 در دو صفحه به صورت نشان داده شده عمل می کنند این دو کوپل را می توان با حاصل جمع بردارشان (M) به صورتی که در شکل (B) نشان داده شده است تعویض کرد. این تعویض را می توان از طریق ایجاد کوپل M از نیروی F که ترکیب برداری F_1 و F_2 می باشد تأیید کرد.



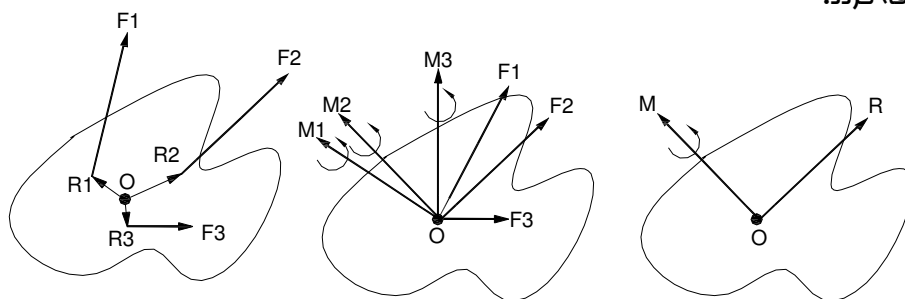
انتقال بردار نیرو:

یک کوپل مشخص و یک نیرو را که در صفحه کوپل واقع است می توان به یک نیروی واکند تبدیل کرد.



برایند مجموعه های نیرو:

در شکل نشان داده شده در زیر هر نیروی F را می توان به موازات خود به نقطه دلخواه انتقال داد. مشروط به اینکه اندازه نیرو ثابت مانده و یک کوپل Fd که در آن d بازوی گشتاور از O تا موقعیت ابتدائی F می باشد به آن اضافه گردد.



$$R = \sum F = F_1 + F_2 + \dots$$

$$M = \sum m_1 + m_2 + \dots = \sum (r \times F)$$

مجموعه نیروهای متوازی:

واضح است که برایند نیروهای متوازی دارای مقداری برابر با حاصل جمع عددی مجموعه نیروها می باشد. موقعیت خط اثر برایند با استفاده از قضیه واریتون به دست می آید. چون گشتاور برایند حول هر مموری می باید برابر حاصل جمع گشتاورهای مولفه های آن حول همان محور باشد.

$$R = F_1 + F_2 + F_3$$

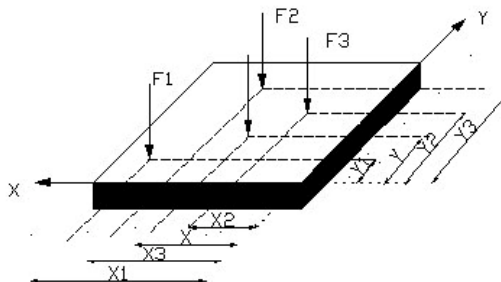
$$\bar{x}_R = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3$$

$$\bar{y}_R = F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3$$

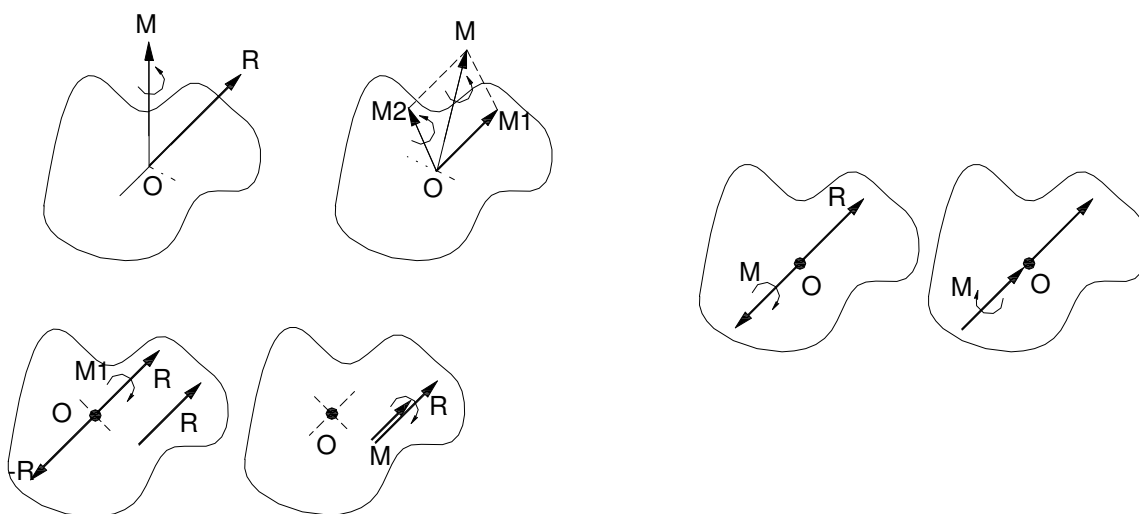
$$R = \Sigma F$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(F_x)}{R}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma(F_y)}{R}$$



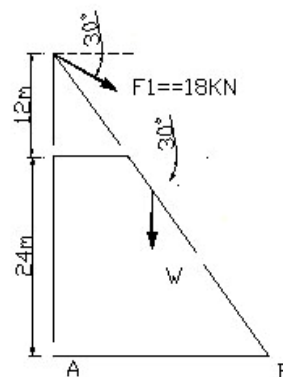
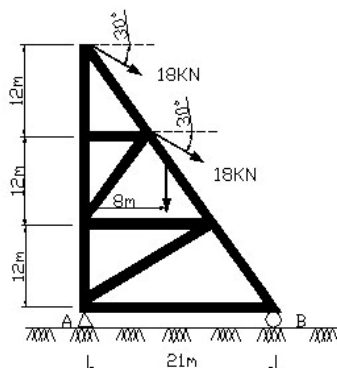
برایند پیچ گشتی وار:



در صورتی که بردار برایند کوپل ها M به موازات برایند نیروها باشد. برایند حاصل برایند پیچ گشتی وار خوانده میشود. هر مجموعه نیرو را می توان به یک برایند پیچ گشتی وار که در امتداد خط اثر منحصراً بفردی عمل می کند، تبدیل کرد.

مثال:

برتیر مشبکی به وزن 40kN دو کابل که نیروی کششی هر کدام برابر با 18kN می باشد مطابق شکل اثر می کند. مطلوب است برآیند نیروی وارد بر تیر مشبک و نقطه تقاطع امتداد اثر برآیند با خط AB



$$F_1 = F_2 = 15.59i - 9j$$

$$R = \sum F = -40j + 15.59i - 9j + 15.59i - 9j = 31.2i - 58j$$

$$R = \sqrt{(31.2)^2 + (58)^2} = 65.86 \text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{58}{31.2}\right) = 61.7^\circ$$

$$\sum M_A = 0 \quad + (7i + 24j) \times (15.59i - 9j)$$

$$M_A^R = (31.2) \times (36) + (31.2) \times (24) + (58) \times (7) = 1318 \text{ kN.M}$$

$$M_A^R = \sum r \times F = (8)i \times (-40)j + (36)j \times (15.59i - 9j)$$

$$-58xk = -1.318k \Rightarrow x = 22.7$$

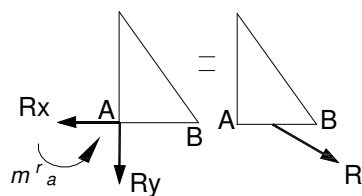
$$M_A^R = (-320 - 561 - 63 - 374)k = (-1.318 \text{ kN.M})k$$

روش دوم:

$$r \times R = M_A^R \Rightarrow (x)i \times (31.2i - 58j) = -1.318k$$

$$F \times d = M_A^R$$

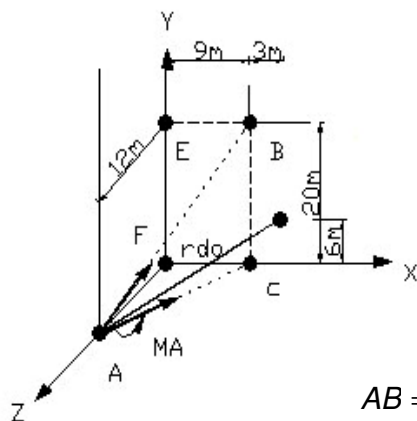
$$15.59 \times 36 + 15.59 \times 24 + 9 \times 7 + 40 \times 8 = 58\bar{x}$$



$$1318 = 58\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = 22.7$$

مثال:

سیستم کوپل نیرو در نقطه A شامل نیروی F به مقدار 25N و کوپل MA به گشت آور 250N.M می باشد. این سیستم کوپل نیرو را به سیستم کوپل نیروی معادل در نقطه D بایگزین کنید.



$$\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 9 & 9 & 12 \\ \hline A & 0 & B & 20 \\ \hline 12 & 0 & C & 0 \\ \hline & & D & 6 \end{array}$$

$$\vec{AB} = 9\vec{i} + 20\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$\vec{F} = 9\vec{i} + 20\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$\vec{AC} = 9\vec{i} - 12\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = 150\vec{i} - 200\vec{k}$$

$$\vec{M}_D = \vec{M}_A + \vec{S} \times \vec{F}$$

$$\vec{S} = \vec{DA} = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\begin{array}{l} \vec{AB} = 25\vec{m} \\ \vec{F} = 25\vec{N} \\ \vec{AC} = 15\vec{m} \\ \vec{M}_A = 250\vec{N.m} \end{array}$$

$$\vec{M}_D = \vec{M}_A + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -12 & -6 & 12 \\ 9 & 20 & -12 \end{vmatrix} = \vec{M}_A + (72 - 240)\vec{i} + (108 - 144)\vec{j} + (-240 + 54)\vec{k}$$

کوپل نیروی سیستم در نقطه D

$$\vec{M}_D = (150\vec{i} - 200\vec{k}) - 168\vec{i} - 36\vec{j} - 180\vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{M}_D = -18\vec{i} - 36\vec{j} - 386\vec{k} \\ \vec{F} = 9\vec{i} + 20\vec{j} - 12\vec{k} \end{cases}$$

فصل چهارم

تبادل اجسام صلب:

مفهوم مهندسی تبادل و یا سکون آن است که ذره و یا جسم مادی مرکبی نداشته باشد لذا وقتی که نیروهای خارجی یک سیستم معادل با صفر تشکیل می دهند می گویند که جسم صلب در حال تبادل است. بنابراین شرط لازم کافی برای تبادل یک جسم صلب به صورت زیر نوشته می شود.

$$\sum F = 0 \quad \text{و} \quad \sum M_O = \sum (r \times F) = 0$$

$$\begin{array}{lll} \sum F_x = 0 & \sum F_y = 0 & \sum F_z = 0 \\ \sum m_x = 0 & \sum m_y = 0 & \sum m_z = 0 \end{array}$$

نمودار جسم آزاد:

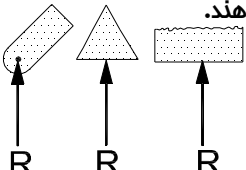
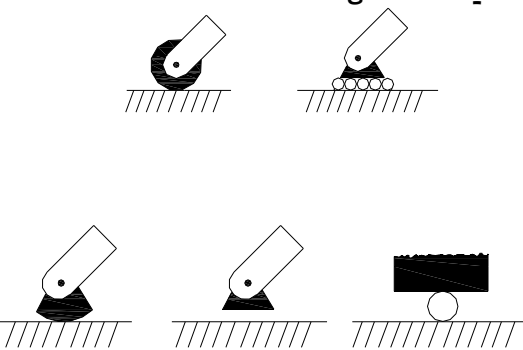
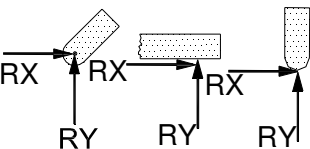
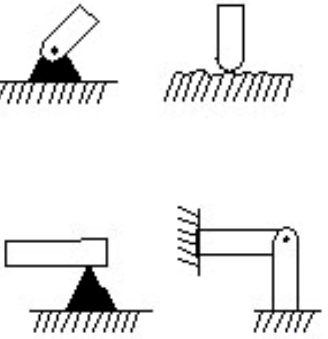
نمودارهای جسم آزاد را در فصول قبل به کرات به کار بردیم، به خاطر اهمیت این نمودارها به طور خلاصه روش ترسیم را در زیر می آوریم.

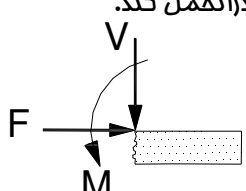
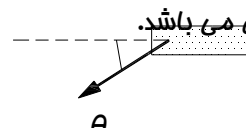
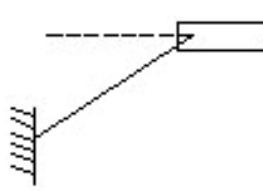
1) جسم آزاد منتخب را به طور مشخص تعیین می کنیم و سپس این جسم را از بین و تمام اجسام دیگر جدا می کنیم و بعد طرح کلی جدا شده را ترسیم می کنیم.

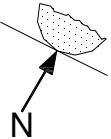
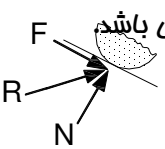
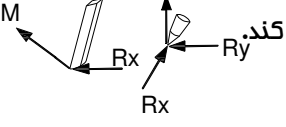
2) همه نیروهای خارجی را روی نمودار جسم آزاد نشان می دهیم به صورتی که بزرگی و راستای نیروهای خارجی مشخص باشد.

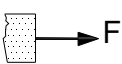
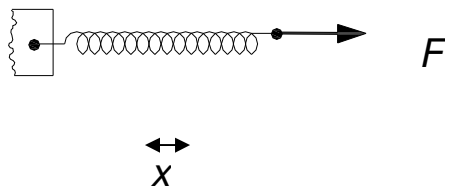
3) نیروهای خارجی مجهول که معمولاً عکس العملهایی هستند که اجسام دیگر با مخالفت با حرکت جسم آزاد از خود نشان می دهند.

نیروهای اتصالی و تکیه گاه:

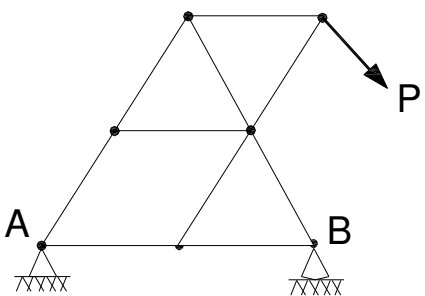
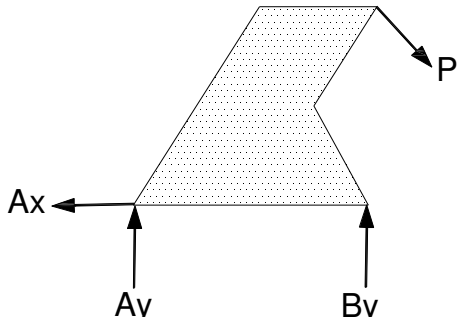
تعداد مجهولات	اثر نیروی جزء منفصل شده	نوع تکیه گاه
1	تکیه گاههای غلتکی، چرخی، ساپمه ای و سایر انواع که در شکل نشان داده شده است نیروی فشاری و عمود بر سطح تماس را انتقال می دهند. 	1. تکیه گاه غلتکی 
2	یک اتصال مفصلی که آزادی گردش داشته باشد می تواند نیروی در هر امتداد دو جهت در صفحه عمود بر محور را انتقال دهد. لولائی که آزادی گردش نداشته باشد می تواند تحت تأثیر یک کوپل نیز باشد 	2. اتصال مفصلی با فار مغزی 

3	یک اتصال گیردار می تواند نیروئی مموری F و نیروئی (برشی) V و کوپل M که در مقابل چرخش مقاومت می کند را تحمل کند. 	3. اتصال گیردار 
1	نیروئی که توسط یک کابل انعطاف پذیر اعمال می شود همیشه به صورت یک نیروی کششی در جهت گریز از جسم و در امتداد مماس بر کابل می باشد. 	4. کابل، تسمه، زنجیر 

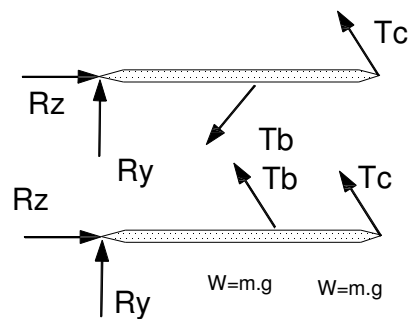
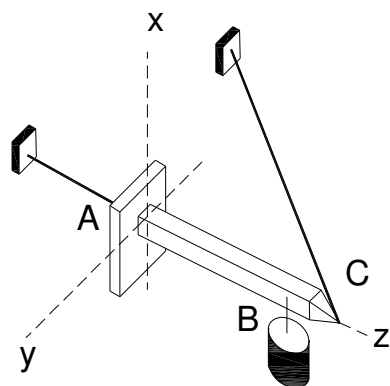
تعداد مجهولات	نوع تکیه گاه	اثر بر روی جزء منفصل شده
1	سطوح صیقلی	نیروی تماس همواره فشاری است و عمود بر سطح تماس 
2	سطوح زبر	سطوح (برق) بلیت تحمل یک مولفه مماسی نیرو یعنی F (نیروی اصطکاک) از برآیند نیروی تماس R را نیز علاوه بر مولفه عمودی N دارا می باشد 
3	اتصال ساچمه ای	یک اتصال ساچمه ای نیروئی را در هر جهت تحمل مینماید. یک اتصال جوش شده ساچمه ای به علاوه یک گوی را نیز تحمل می کند.  اتصال آزاد اتصال جوش شده

	نیروی وارده بر فنر در صورتیکه کشیده شود کششی و در صورتی که فشرده شود فشاری است. برای یک فنر ارتجاعی با الاستیسیته فطری، سفتی K عبارتند از نیروی لازم برای تغییر طول آن به اندازه واحد 	عمل فنر 
--	---	---

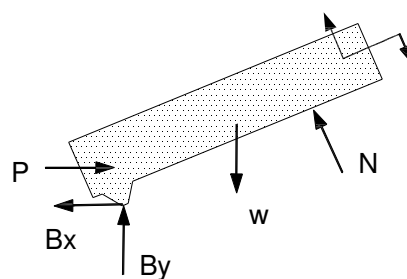
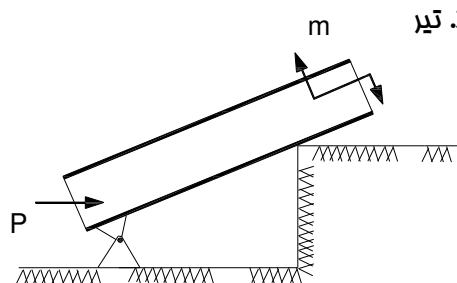
نمونه هایی از ترسیم آزاد:

مجموعه سازه	نمودار جسم آزاد
1. فرپای مسطح 	

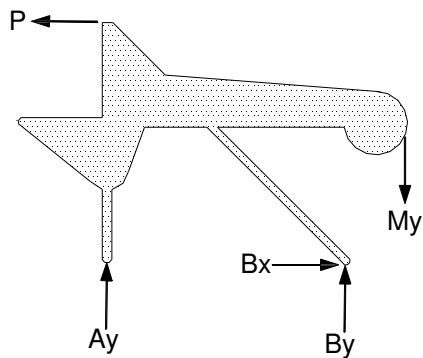
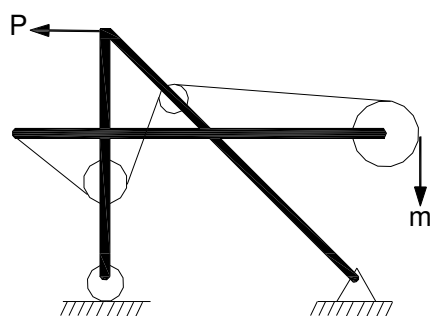
2. دکل فضائی



3. تیر



4. یک مجموعه سازه متشکل از چند عضو



عکس العمل های نا معین از لحاظ استاتیکی - تیرهای ناقص:

$$R = \text{مجهولات} \quad r = 3 = \text{معادلات}$$



نا معین

$$R > 3 \Rightarrow$$

$$R = 4 > 3 \Rightarrow n = 4 - 3 = 1$$

$$R < 3 \Rightarrow$$

نا پایدار (مقید ناقص)



$$R = 2 < 3$$

$$R = 3 \Rightarrow$$

معین



$$R = 3 = 3 \Rightarrow n = 3 - 3 = 0$$

در حالت سه بعدی تعداد معادلات شش عدد است که اگر کمتر از شش عدد مجهول داشته باشیم مستحکم ناقص است و اگر مجهولات بیشتر از شش عدد باشد مستحکم نا معین است و اگر تعداد مجهولات شش عدد یعنی مساوی معادلات باشد معین است.

$$R = 6 \Rightarrow$$

معین

$$R > 6 \Rightarrow$$

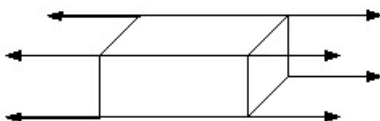
نا معین

$$R < 6 \Rightarrow$$

نا پایدار

در صورتی که مجهولات شش عدد باشند ولی همه موازی باشند و یعنی در صفحه قرار دارند این قابل قبول نیست برای یک جسم صلب دو بعدی :

عکس العمل های تکیه گاهی می توانند بسته به نوع تکیه گاه یک یا دو ویاسه مجهولی باشند



لذا برای حل معادلات زیر را می نویسیم.

(1) سه معادله ی تعادل

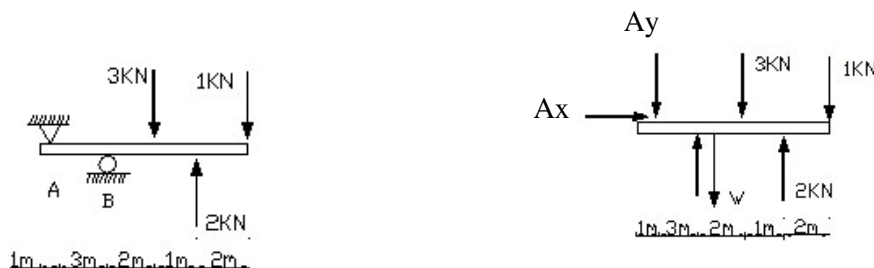
$$\sum F_x = 0, \sum M_A = 0, \sum M_B = 0$$

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_O = 0$$

که نقطه ی B در آن طوری انتخاب شود که خط AB موازی با محور y نباشد و $\sum M_B = 0$ و $\sum M_O = 0$ و $\sum M_A = 0$ که نقطه های A, B, C روی یک خط راست نباشند.

مثال:

تیر یکنواخت 9M متری دارای جرمی برابر 200kg کیلو گرم می باشد و در صفحه قائم توسط نیروهای موازی به صورت نشان داده شده در شکل بار گذاری شده است. عکس العمل های تکیه گاه های مفصلی متمرکز در A, B را مناسبه کنید.



$$W = m.g = 200 \times 10 = 2000N = 2KN$$

$$\curvearrowleft + \sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$-B_y \times 3 + 2 \times 3.5 - 2 \times 6 + 1 \times 8 - 3 \times 5 = 0$$

$$B_y = 6KN$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

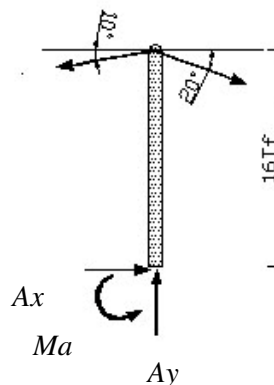
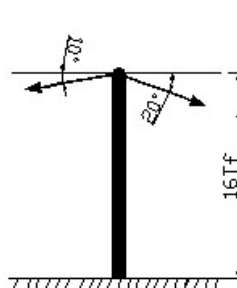
$$-A_y + 6 - 2 - 3 + 2 - 1 = 0 \rightarrow$$

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$cont = + \uparrow \sum M_B = 0 \Rightarrow -2 \times 3 + 2 \times 0.5 + 3 \times 2 - 2 \times 3 + 1 \times 5 = 0$$

مثال:

تیر تلفنی به وزن 300Lb برای نگهداری دو انتهای سیم بکار برده شده کشش در سیم سمت چپ 80 پوند و امتداد آن با افق زاویه 10° می سازد (a) هر گاه کشش سیم T_2 صفر باشد معین کنید عکس العمل در نقطه A را (b) بیشترین و کمترین مقدار T_2 را هرگاه مقدار کوپل وارد بر نقطه A بیش از 600Lb - ft نباشند.



$$T_2 = 0$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x - 80\cos 10^\circ = 0 \Rightarrow A_x = 78.8Lb$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 300 - 80(\sin 10^\circ) = 0 \Rightarrow A_y = 314Lb \uparrow$$

$$\curvearrowleft + \sum M_A = 0$$

$$M_A + 80(\cos 10^\circ) \times (16\text{ ft}) = 0 \Rightarrow$$

$$M_A = -1260Lb - ft$$

$$M_A = 1260Lb - ft$$

$$T_2 \neq 0$$

$$M_A = 1260Lb - ft$$

$$(80\cos 10^\circ)(16\text{ ft}) - (T_2 \cos 20^\circ)(16\text{ ft}) + M_A = 0$$

$$1260 - T_2 \cos 20^\circ \times 16 \pm 600Lb - ft = 0$$

$$\curvearrowleft + \sum M_A = 0$$

$$T_2 = 43.9Lb, T_2 = 1273.7Lb$$

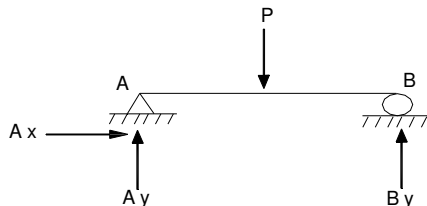
کشش آور مول نقطه A کوپکترا از 600Lb - ft است وقتی که

$$43.9Lb \leq T_2$$

معادلات تعادل برای یک جسم صلب دو بعدی :

عکس العمل های تکیه گاهی می توانند بسته به نوع تکیه گاه - یک یا دو یا سه مجهولی باشند لذا برای حل معادلات را به صورت زیر می نویسیم.

(1) سه معادله ی تعادل



$$\sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + P/2 - P = 0$$

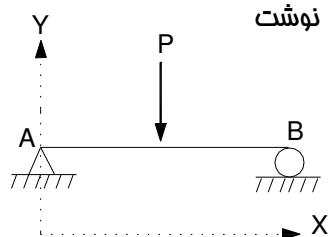
$$A_y = P/2 \uparrow$$

$$\sum m_A = 0$$

$$B_y \times L - P \times L/2 = 0$$

$$B_y = P/2 \uparrow$$

اما به غیر از این حالت چند مورد معادله تعادل دیگر نیز می توان نوشت



$$\sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

$$\sum m_A = 0$$

$$B_y \times L - P \times L/2 = 0$$

$$B_y = P/2 \uparrow$$

$$\sum m_B = 0$$

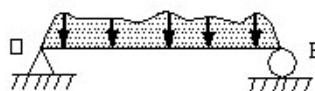
$$-A_y \times L + P \times L/2 = 0$$

$$A_y = P/2 \uparrow$$

اما باید دقت کرد که نقطه B باید طوری انتخاب گردد که خط AB موازی با محور y ها نباشد.

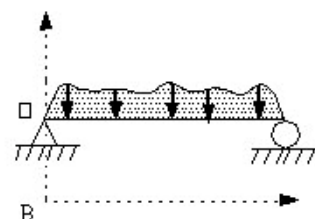
اشتباه $\sum F_x = 0$ $\sum m_A = 0$ $\sum m_{B'} = 0$

لذا مفهوم تعادل به صورت زیر بیان می گردد.



1)

صحيح



اشتباه

$$\sum m_O = 0$$

$$\sum m_B = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

2)

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum m_O = 0$$

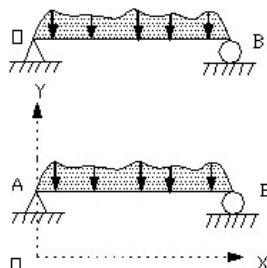
$$\sum m_B = 0$$

3)

$$\sum m_A = 0$$

$$\sum m_B = 0$$

$$\sum m_C = 0$$



اشتباه

صحیح



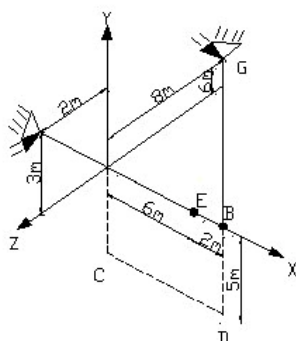
معادلات تعادل برای اجسام سه بعدی :

در حالت سه بعدی تعداد معادلات شش عدد است.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad \sum m_x = 0 \quad \sum m_y = 0 \quad \sum m_z = 0$$

مثال:

صفحه ای همگن به ابعاد 8×5 به وزن 270N در نقطه A بر روی کاسه ساچمه متکی بوده و بوسیله دو کابل نگهداری می شود. معین کنید کشش در هر کابل و عکس العمل در نقطه A را.



$\begin{vmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}$
--	---	---	--

$$T_{EF} = T_{EF} \left(-\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k \right)$$

$$T_{BG} = T_{BG} \left(-\frac{8}{12}i + \frac{4}{12}j - \frac{2}{12}k \right) = T_{BG} \left(-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k \right)$$

$$+ \uparrow \sum M_A = 0$$

$$(4i) \times (-270j) + (6i) \times \left(-\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k \right) T_{EF}$$

$$+ (8i) \times \left(-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k \right) T_{BG} = 0$$

$$\Rightarrow -1080k + \frac{18}{7}T_{EF}k - \frac{12}{7}T_{EF}j + \frac{8}{3}T_{BG}k + \frac{16}{3}T_{BG}j = 0$$

$$-\frac{12}{7}T_{EF} + \frac{16}{3}T_{BG} = 0 \quad T_{EF} = 315N$$

$$\frac{18}{7}T_{EF} + \frac{2}{3}T_{BG} - 1080 = 0 \quad T_{BG} = 101.3N$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow A + T_{EF} + T_{BG} - 270j = 0$$

$$A_x i + A_y j + A_z k + 315(-\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k)$$

$$+ (101.3)(-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k) - 270j = 0$$

$$[A_x - \frac{6}{7} \times 315 - \frac{2}{3}(101.3)]i + [A_y + \frac{3}{7} \times 315 + \frac{1}{3} \times 101.3 - 270]j$$

$$+ [A_z + \frac{2}{7}(315) - \frac{2}{3}(101.3)]k = 0$$

$$A_x - 270 - 67.5 = 0$$

$$A_x = 338.5N$$

$$A_y + 135 + 33.8 - 270 = 0$$

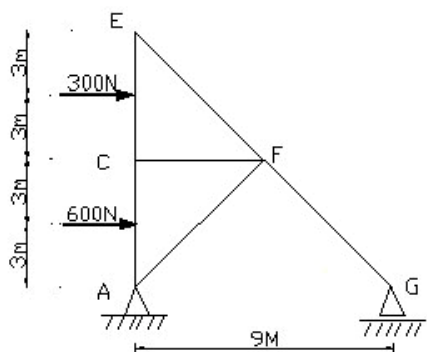
$$A_y = 101.2N$$

$$A_z + 90 - 67.5 = 0$$

$$A_z = -22.5N$$

مثال:

معین کنید مولفه نیروی تکیه گاهی و ارباقاب مشبک زیر



$$\curvearrowright + \sum M_A = 0$$

$$-600 \times 3 - 300 \times 9 + G_y \times 9 = 0 \Rightarrow G_y = 500N \uparrow$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$G_y + A_y = 0 \Rightarrow A_y = -500 \Rightarrow A_y = 500N \downarrow$$

cont :

$$\curvearrowright + \sum M_G = 0$$

$$300 \times 9 + 600 \times 3 - 500 \times 9 = 0$$

نیروهای گسترده: مرکزهای هندسی و مرکزهای گرانی

گرانیکاه جسم دو بعدی

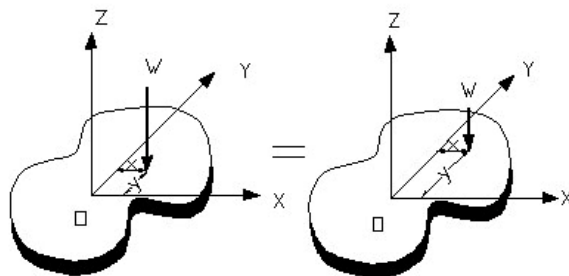
گرانیکاه یک صفحه:

یک ورق تخت افقی را در نظر می گیریم این ورق را می توانیم به 8 جزء کوچک تقسیم کنیم

مختصات y, x و y_2, x_2 جزء اول را با y و x و y_2, x_2 جزء دوم را با y_2 و x_2

نشان می دهیم و به همین ترتیب نیروهای ناشی از اثر زمین بر اجزای ورق را به ترتیب با $\Delta W_1, \Delta W_2, \Delta W_n$ نشان می دهیم.

$$\sum F_z \Rightarrow W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n$$



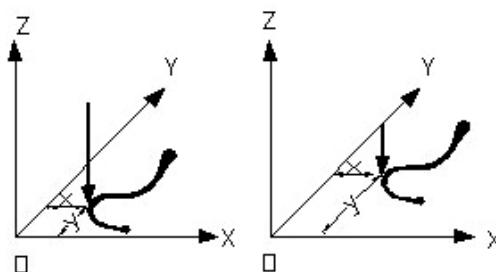
$$\sum M_y : \bar{x}w = \sum x\Delta w, \sum M_x : \bar{y}w = \sum yw$$

$$\sum M_y : \bar{x}w = x_1\Delta w_1 + x_2\Delta w_2 + \dots + x_n\Delta w_n$$

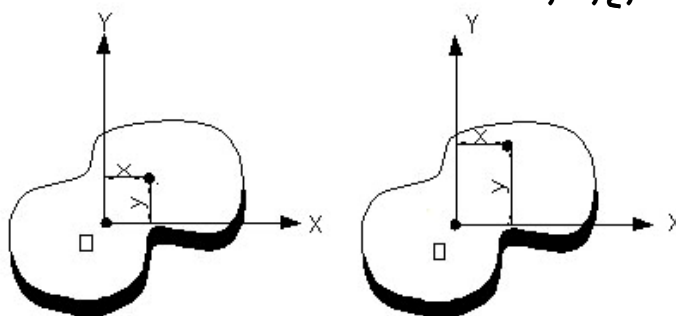
$$\sum M_x : \bar{y}w = y_1\Delta w_1 + y_2\Delta w_2 + \dots + y_n\Delta w_n$$

اگر تعداد اجزاء افزایش یابد و اندازه هر جزء را کاهش بدهیم عبارتهای زیر به دست می آید.

$$\bar{y}w = \int ydw, \quad \bar{x}w = \int xdw, \quad W = \int dw$$



مرکزهای هندسی سطوح و خطوط:

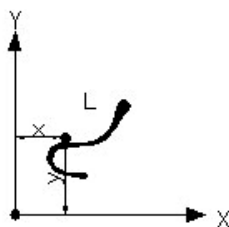
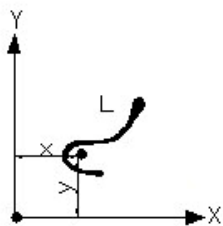


$$\sum M_y = \bar{x}A = x_1\Delta A_1 + x_2\Delta A_2 + \dots + x_n\Delta A_n$$

$$\sum M_x = \bar{y}A = y_1\Delta A_1 + y_2\Delta A_2 + \dots + y_n\Delta A_n$$

$$\bar{x}A = \int x dA$$

$$\bar{y}A = \int y dA$$



$$\bar{y}L = \int y dL$$

$$\bar{x}L = \int x dL$$

$$Q_y = \int x dA$$

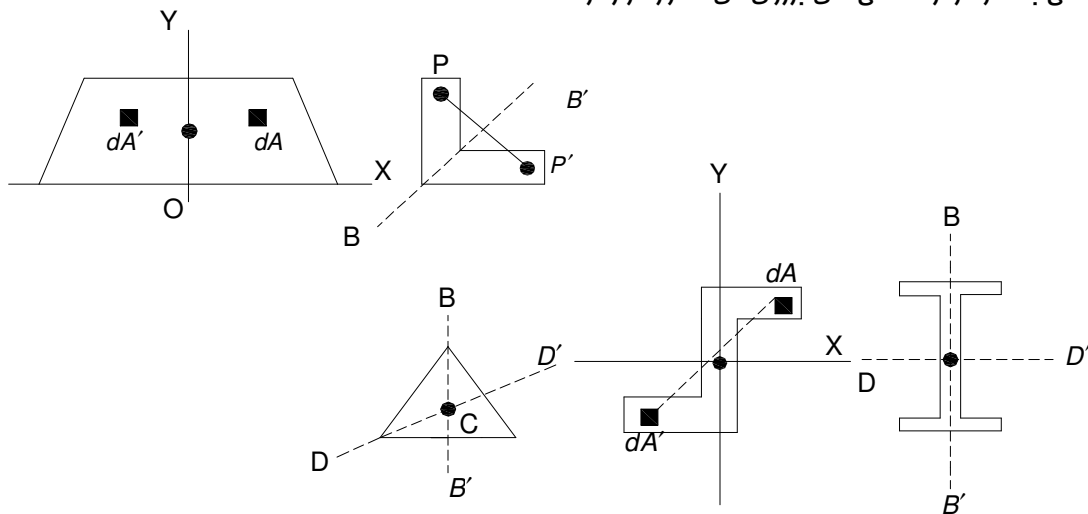
$$Q_y = \bar{x}A$$

$$Q_x = \int y dA$$

$$Q_x = \bar{y}A$$

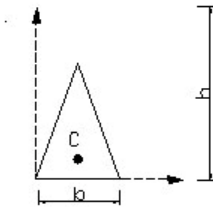
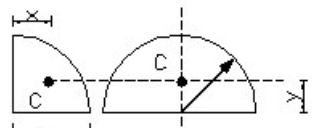
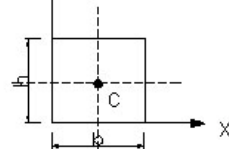
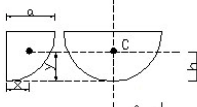
گشتاورهای اول سطوح و خطوط:

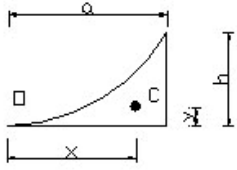
وقتی سطحی مانند A یا قطعی مانند L دارای یک محور تقارن باشد، گشتاور اول آن نسبت به آن محور برابر صفر می باشد و مرکز هندسی اش بر روی آن محور قرار دارد.



اگر سطحی یا فطی دارای دو محورتقارن باشد مرکز هندسی اش C باید در محل تلاقی در محورتقارن قرار داشته باشد. سطح A را نسبت به مرکز O متقارن می گویند اگر متناظر با هر جزء سطح dA به مختصات y,x یک جزء سطح dA' به مختصات -y,-x وجود داشته باشد در این صورت

$$Q_x = Q_y = 0$$

نام شکل	شکل	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	مسامت
مثلث		$\frac{a+b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
ربع دایره		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
نیم دایره		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
مستطیل		$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$b \cdot h$
نیم سهمی		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$

سهمی		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
اسپاندرال سهمی		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$

مثال:

مقتمات مرکز سطحی صفه زیر را تعیین کنید.

سطح	A	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}A$	$\bar{y}A$
I	8	0.5	4	4	32
	4	3	0.5	12	2
Σ	12	-	-	16	34

$$\bar{x} \Sigma A = \Sigma \bar{x}A \Rightarrow \bar{x}(12) = 16 \Rightarrow \bar{x} = 1.33m$$

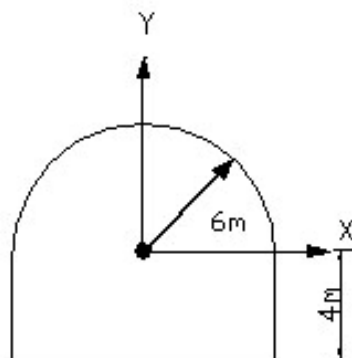
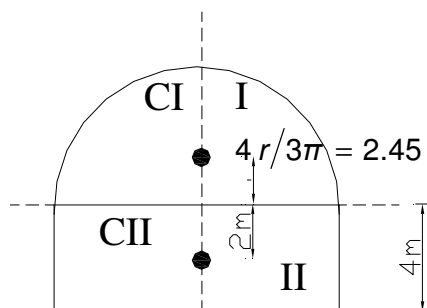
$$\bar{y} \Sigma A = \Sigma \bar{y}A \Rightarrow \bar{y}(12) = 34 \Rightarrow \bar{y} = 2.83m$$

مثال:

مقتمات مرکز سطحی صفه زیر را تعیین کنید.

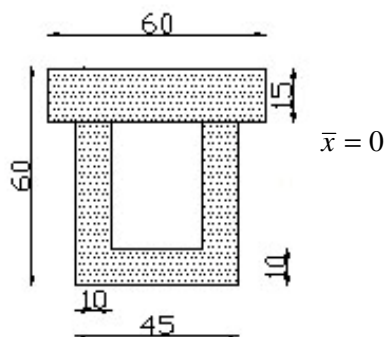
بعثت تقارن $\bar{x} = 0$

سطح	A	$\bar{y}$	$\bar{y}A$
I	56.6	2.54	144
II	48	-2	-96
Σ	104.6	-	48



$$\bar{y} \sum A = \sum \bar{y}A \Rightarrow \bar{y}(104.6) = 48 \Rightarrow \bar{y} = 0.459m$$

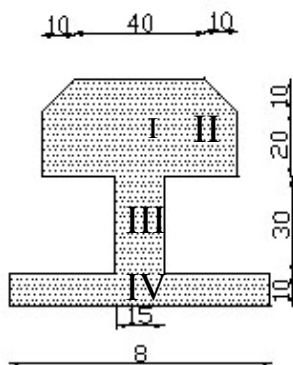
I
III
II



مثال:
بعلت تقارن

سطح	A	$\bar{y}$	$\bar{y}A$
I	$60 \times 15 = 900$	7.5	6750
II	$45 \times 45 = 2025$	$(\frac{45}{2} + 15) = 37.5$	75937.5
III	$-25 \times 35 = -875$	$(\frac{35}{2} + 15) = 32.5$	-28437.5
Σ	2050		24250

$$\bar{y} \sum A = \sum yA \Rightarrow \bar{y} \times 2050 = 54250 \Rightarrow \bar{y} = 26.46cm$$



مثال:
بعلت تقارن

سطح	A	$\bar{y}$	$\bar{y}A$
I	$60 \times 30 = 1800$	15	27000
II	$-2 \times 10 \times \frac{10}{2} = -100$	$\frac{10}{3} = 3.33$	-333.3
IV	$80 \times 10 = 800$	5+60=65	52000
Σ	2950		98916.7

$$\bar{y} \sum A = \sum yA \Rightarrow \bar{y} \times 2950 = 98916.7$$

[ارهای گسترده روی تیرها]

بار گسترده وارد بر تیر بر ماسب بیان میگردد و لذا بزرگی نیروی وارد بر یک جزء تیر به طول dx برابر است با

$$(1) \quad (2) \quad W dx = dA$$

$$W = \int_0^L W dx \Rightarrow W = \int dA = A \quad (1), (2)$$

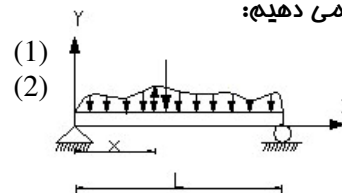
مال باید ببینیم که این بار متمرکز W به کجای تیر و بر ایند بارهای گسترده C وارد می گردد برای بدست آوردن نقطه

اثر P بار معادل متمرکز W گشتاور W مول نقطه O را برابر با مجموع گشتاورهای بارهای جزئی dw مول نقطه O

قرار می دهیم:

$$(OP)W = \int x dW \Rightarrow (OP)A = \int_0^L x dA \Rightarrow \bar{x}A = \int_0^L x dA$$

$$dW = W dx = dA, W = A \quad (1), (2)$$

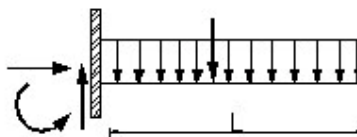
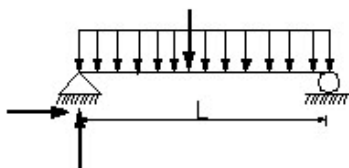


بنا بر این به جای بار گسترده وارد بر تیر می شود یک بار متمرکز قرار داده، بزرگی این بار متمرکز برابر با سطح

زیر منحنی بار است و فضا اثرش از مرکزی آن سطح عبور می کند

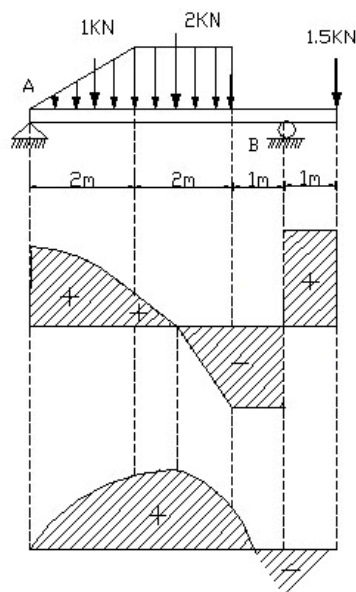
مثال:

مطلوب است محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی تیر های زیر را



$$(1) \left\{ \begin{array}{l} + \sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \times L - WL \times \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow B_y = W \frac{L}{2} \uparrow \\ + \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0 \\ + \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + W \frac{L}{2} - WL = 0 \Rightarrow A_y = W \frac{L}{2} \uparrow \\ + \downarrow \text{cont } \sum M_B = 0 \Rightarrow W \frac{L}{2} \times L - WL \times \frac{L}{2} = 0 \quad OK \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} + \sum M_A = 0 \Rightarrow +16 \times 2 - M_A = 0 \Rightarrow M_A = 32 N.M \\ + \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 16 = 0 \Rightarrow A_y = 16 N.M \\ + \rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0 \Rightarrow + \rightarrow \text{cont } \sum M_B = 0 \\ \Rightarrow 32 - 16 \times 4 + 16 \times 2 = 0 \quad OK \end{array} \right.$$



$$+\sum M_A = 0 \Rightarrow -2 \times 3 - 1 \times \frac{2}{3} \times 2 - 1.5 \times 6 + B_y \times 5 = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 3.27 - 1 - 2 - 1.5 = 0 \Rightarrow A_y = 1.23 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright + \sum M_B = 0 \Rightarrow -1.23 \times 5 + 1 \times 4.33 + 2 \times 2 - 1.5 \times 1 = 0 \quad OK$$

$$B_y = 3.27 \text{ kN} \uparrow$$

$$A_1 = 2 \times 1.233 - 1 \times \frac{2}{3} = 1.799$$

Or

$$A_1 = 2 \times 0.233 + \frac{2}{3} \times 1 \times 2 = 1.799$$

$$A_2 = 0.233 \times \frac{0.233}{2} = 0.027$$

$$A_3 = -1.767 \times \frac{1.767}{2} = -1.56$$

$$A_4 = -1.767 \times 1 = -1.767$$

$$A_5 = 1.5 \times 1 = 1.5$$

تملیل سازه ها

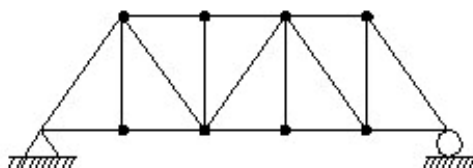
در فصول گذشته با تعادل یک جسم صلب تنها سروکار داشتیم و نقطه نیروهای خارجی وارد بر جسم صلب را در بر می گرفتند. حالا می خواهیم مسئله های را در نظر به گیریم که با تعادل سازه های متشکل از چند قسمت متصل سروکار دارند. در این مسئله ها نه تنها باید نیروهای خارجی وارد بر سازه را تعیین کرد بلکه باید نیروهای خارجی وارد بر سازه را تعیین کرد بلکه باید نیروهای را هم که قسمت های مختلف سازه را به هم متصل نگه میدارند به دست آورد. اگر کل سازه ها را در نظر بگیریم، این نیروها را نیروهای داخلی مینامند.

انواع سازه های مهندسی مورد بررسی:

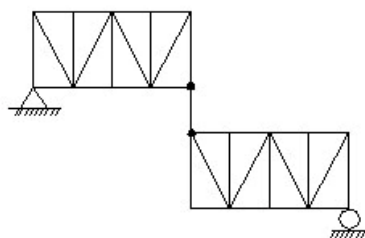
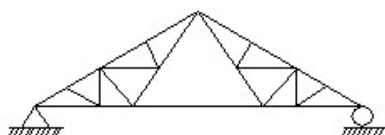
(1) فرپاها (2) قابها (3) ماشینها

انواع فرپاها:

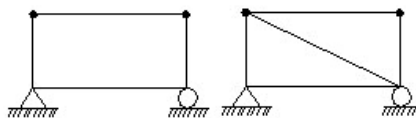
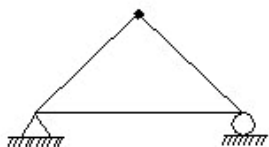
(1) فرپاهای سازه: سازه هایی که از زیر مجموعه بنیادی مثلثی تشکیل شده اند مجموعه های مفصلی و یا فرپاهای ساده خوانده می شوند.



(2) فرپاهای مرکب: از تشکیل یکسری فرپاهای ساده که به وسیله یکسری اعضاء به یکدیگر متصل گردیده اند.



(فرپاهای مبهم (پیچیده): فرپاهایی که نه ساده می باشند و نه مرکب.



$$M = 3$$

$$j = 3$$

$$R = 3$$

$$M + 3 < 2j$$

$$M = 4$$

$$j = 4$$

$$R = 3$$

$$M + 3 < 2j$$

$$4 + 3 < 8$$

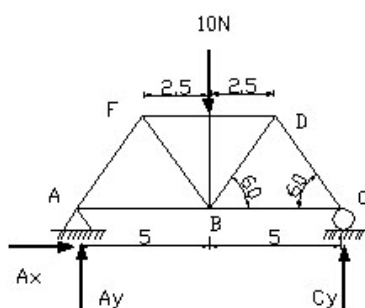
$$8 = 8$$

$$M + R > 2j \Rightarrow n = (M + R) - Lj$$

$$M + R = 2j \Rightarrow n = 0$$

$$M + R < 2j \Rightarrow n < 0$$

روش های آنالیز فرپاها:



1) روش مفصل (تعادل مفاصل):

در میله های فرپا، در یک عضو یا نیروی کششی وجود دارد و یا نیروی فشاری به عبارت دیگر فقط یک نیروی مموری در امتداد میله وجود دارد و میله لنگر را تحمل نمی کند.

$$M = 9, j = 6, R = 3 \Rightarrow M + 3 = 2j \Rightarrow 9 + 3 = 12 = 2 \times 6 = 12$$

معین داخلی و از لحاظ خارجی نیز معین است.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$-10 \times 5 + C_y \times 10 = 0 \Rightarrow C_y = 5N \uparrow$$

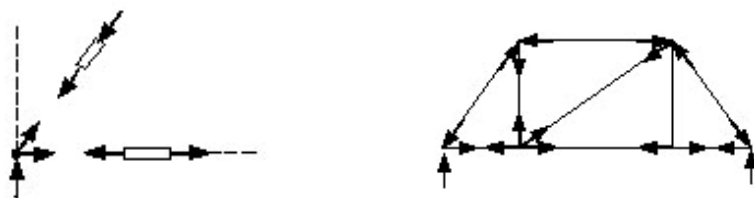
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$A_y + 5 - 10 = 0 \Rightarrow A_y = 5N \uparrow$$

$$cont: +\sum M_B = 0 \Rightarrow$$

$$5 \times 10 - 10 \times 5 = 0$$

تعادل برقرار است



گره A:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

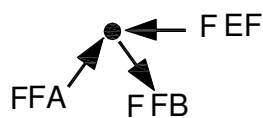
$$-F_{AF} \sin 60^\circ + 5 = 0 \Rightarrow F_{AF} = 5.77 N$$

$$+\uparrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{AF} \cos 60^\circ + F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 2.88 N$$

فشاری

کششی



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$5.77 \sin 60^\circ - F_{FB} \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow F_{FB} = 5.77 N$$

$$+\uparrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

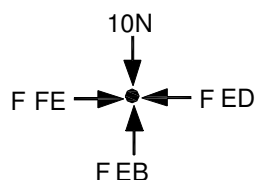
$$F_{FA} \cos 60^\circ + F_{FB} \sin 60^\circ - F_{EF} = 0 \Rightarrow$$

$$2 \times 5.77 \times \sin 60^\circ - F_{EF} = 0 \Rightarrow F_{EF} = 10 N$$

کششی

فشاری

گره E:



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$F_{EB} - 10 = 0 \Rightarrow F_{EB} = 10 N$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{ED} + F_{FE} = 0 \Rightarrow -F_{ED} + 10 = 0 \Rightarrow F_{ED} = 10 N$$

فشاری

فشاری

گره B:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$F_{BF} \sin 60^\circ + F_{BD} \sin 60^\circ - F_{BE} = 0 \Rightarrow$$

$$5.77 \times 0.87 + F_{BD} \times 0.87 - 10 = 0 \Rightarrow F_{BD} = 5.77 N$$

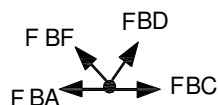
$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{BF} \cos 60^\circ + F_{BD} \cos 60^\circ + F_{BC} - F_{BA} = 0 \Rightarrow$$

$$-5.77 \cos 60^\circ + 5.77 \cos 60^\circ + F_{BC} - 2.88 = 0 \Rightarrow$$

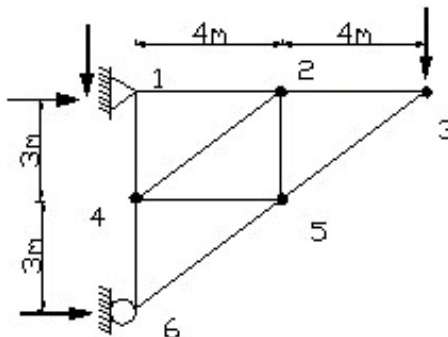
$$F_{BC} = 2.88 N$$

کششی



کششی

مثال:



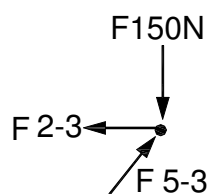
گره 3:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$F_{(5-3)} \times \frac{3}{5} - 150 = 0 \Rightarrow F_{(5-3)} = 250N$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$F_{(5-3)} \times \frac{4}{3} - F_{(2-3)} = 0 \Rightarrow F_{(2-3)} = 200N$$



عکس العمل ها:

فشاری

کششی

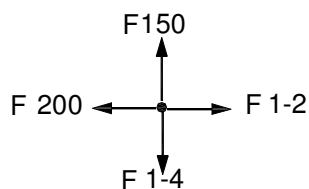
گره 1:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$F_{(1-2)} - 200 = 0 \Rightarrow F_{(1-2)} = 200N$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{(1-4)} + 150 = 0 \Rightarrow F_{(1-4)} = 150N$$

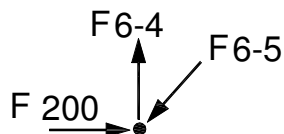


کششی

کششی

گره 6:

فشاری



$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

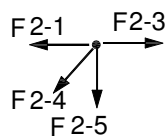
$$-F_{(6-5)} \times \frac{4}{5} + 200 = 0 \Rightarrow F_{(6-5)} = 250N$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{(6-5)} \times \frac{3}{5} + F_{(6-4)} = 0 \Rightarrow F_{(6-4)} = 150N$$

کششی

گره 2:



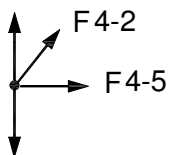
$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$- F_{(2-4)} \times \frac{4}{3} - F_{(2-1)} + F_{(2+3)} = 0 \Rightarrow F_{(2-4)} = 0$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$- F_{(2-5)} = 0 \Rightarrow F_{(2-5)} = 0$$

گره 4:



$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{(4-5)} = 0$$